К ТЕОРИИ ФЛУКТУАЦИЙ ЯРКОСТИ В МЛЕЧНОМ ПУТИ*

В настоящее время можно считать установленным, что поглощающая материя в нашей Галактике имеет клочковатую структуру, т. е. состоит из совокупности отдельных поглощающих облаков, интегральное действие которых и вызывает общее космическое поглощение. Те из близких к нам поглощающих облаков, которые обладают большой поглощательной способностью, наблюдаются в виде так называемых темных туманностей. Излучению отдельных темных туманностей посвящена огромная литература. Однако статистическое излучение всей совокупности поглощающих облаков, обладающих в некоторых случаях небольшой поглощающей способностью, представляет также чрезвычайно интересную задачу.

В одной из предыдущих работ [1] автор показал, что флуктуации в наблюдаемом числе внегалактических туманностей (Hubble) вызываются клочковатостью поглощающей материи в нашей Галактике и вывел из этих флуктуаций некоторое среднее значение оптической толщины каждого облака. Оно получилось равным $0^m.27$.

Можно принять как рабочую гипотезу, что и флуктуации в видимом распределении яркости вдоль Млечного Пути также вызываются поглощающими облаками. По-видимому, такое утверждение можно считать первым приближением к истинному положению дел. Встает вопрос о законе распределения яркостей при таком происхождении упомянутых флуктуаций. Мы даем ниже вывод дифференциального уравнения, которому удовлетворяет функция распределения яркостей, из которого легко получаются соответствующие моменты (математические ожидания) всех порядков.

1. Будем считать, что вся экваториальная плоскость Галактики с равномерной плотностью заполнена до бесконечности звездами и поглощающими облаками. Это условное допущение в данном случае не является абсурдным, так как на больших расстояниях поглощение настолько велико, что находящиеся там звезды и темные облака

* ДАН СССР, **44**, 244, 1944.

практически не влияют на наблюдаемые яркости. При этом мы сначала предположим, что при прохождении света звезд через какое-нибудь облако всегда поглощается одна и та же доля света $1-q$, так что прозрачность равна q.

Если число облаков, расположенных в каком-нибудь направлении до расстояния s от нас, обозначим через $n(s)$ (эта функция, очевидно, принимает случайные значения), то свет от звезды, находящейся на этом расстоянии, ослабнет в $q^{n(s)}$ раз. Следовательно, если элемент объема dV галактического пространства излучает в единице телесного угла энергию ηdV (речь идет о суммарном излучении звезд, расположенных в этом элементе), то полная яркость в каком-нибудь направлении в плоскости галактического экватора будет равна

$$\int_0^\infty q^{n(s)}\eta\, ds.$$

Речь идет о вычислении вероятностей различных значений этого интеграла. Обозначим через $f(I)$ вероятность того, что этот интеграл больше I:

$$f(I)=p\left(\int_0^\infty q^{n(s)}\eta\, ds > I\right).$$

Тогда, очевидно,

$$f(I)=p\left(\int_0^a q^{n(s)}\eta ds + q^{n(a)}\int_a^\infty q^{n(s)-n(a)}\eta\, ds > I\right), \tag{1}$$

где мы ввели некоторую малую положительную величину a.

Если a мало, то $n(a)$ может принять либо значение $n(a)=0$, либо $n(a)=1$. Вероятность первого из этих значений будет равна $1-\nu a$, а вероятность второго νa. Здесь ν есть среднее число облаков, приходящееся на единицу пути луча. Вероятности других значений $n(a)$ будут порядка высших степеней a и мы будем ими пренебрегать. Соответственно этому $\int_0^a q^{n(s)}\eta ds$ может принять либо значение ηa, либо значение $\eta\theta a$, где $0<\theta<1$. Поэтому

$$f(I)=(1-\nu a)p\left(\int_a^\infty q^{n(s)-n(a)}\eta\, ds > I-a\eta\right)+$$

$$+\nu a\, p\left(\int_0^\infty q^{n(s)-n(a)}\eta\, ds > \frac{I-\eta\theta a}{q}\right). \tag{2}$$

Но в силу того, что распределение поглощающих облаков в пространстве равномерное,

$$p\left(\int\limits_a^\infty q^{n(s)-n(a)}\eta\,ds > I\right) = p\left(\int\limits_0^\infty q^{n(s)}\eta\,ds > I\right),$$

вследствие чего уравнение (2) перепишется в виде:

$$f(I) = (1-\nu a)\,f(I-a\eta) + \nu a f\left(\frac{I-\eta\theta a}{q}\right) \tag{3}$$

или, поскольку мы пренебрегаем членами второго порядка относительно a,

$$f(I) = f(I) - \nu a f(I) - a\eta f'(I) + \nu a f\left(\frac{I}{q}\right),$$

откуда

$$f(I) + \frac{\eta}{\nu} f'(I) = f\left(\frac{I}{q}\right). \tag{4}$$

Если введем новую переменную $u = I\dfrac{\nu}{\eta}$, то это уравнение примет форму:

$$f(u) + f'(u) = f\left(\frac{u}{q}\right). \tag{5}$$

Обозначим плотность вероятности $f'(u) = g(u)$. Для нее получаем путем дифференцирования (5) уравнение

$$g(u) + g'(u) = \frac{1}{q}\,g\left(\frac{u}{q}\right). \tag{6}$$

Из этого функционального уравнения нетрудно получить математическое ожидание самой яркости u, ее квадрата и т. д.

Для этого сперва убедимся из (5), что при $u = 0$ имеем:

$$f'(0) = g(0) = 0.$$

Теперь помножим (6) на u и проинтегрируем по всей области $(0, \infty)$

$$\overline{u} + \int\limits_0^\infty g'(u)\,u\,du = q\overline{u},$$

где черта означает среднее значение. Отсюда, интегрируя по частям и пользуясь условием нормировки

$$\int_0^\infty g(u)\,du = 1,$$

находим

$$\bar{u} = \frac{1}{1-q}. \tag{7}$$

Точно так же найдем, помножая (6) на u^2 и интегрируя,

$$\overline{u^2}(1-q^2) = -\int_0^\infty g'(u)\,u^2\,du = 2\bar{u},$$

откуда

$$\overline{u^2} = \frac{2\bar{u}}{1-q^2} = \frac{1}{(1-q)^2(1+q)}.$$

Для относительного среднего квадратичного отклонения получаем:

$$\frac{\overline{(u-\bar{u})^2}}{\bar{u}^2} = \frac{\overline{u^2}}{\bar{u}^2} - 1 = \frac{1-q}{1+q}. \tag{8}$$

Мы видим, что относительное значение среднего квадратичного отклонения целиком определяется значением прозрачности q одного облака.

2. Теперь откажемся от допущения, что все поглощающие облака имеют одинаковую оптическую толщину. Пусть они имеют разные оптические толщины, но при этом будем принимать, что при переходе от одной области пространства к другой распределение облаков по оптическим толщинам не меняется. Пусть вероятность того, что при прохождении луча через облако прозрачность последнего окажется заключенной между q и $q+dq$, равна $d\varphi(q)$. Тогда мы можем опять вывести функциональное уравнение для функции распределения яркостей:

$$f(u) + f'(u) = \int_0^1 f(u/q)\,d\varphi(q). \tag{9}$$

Отсюда можно перейти к плотности вероятности $g(u)$

$$+\,g'(u) = \int_0^1 g\left(\frac{u}{q}\right)\frac{d\varphi(q)}{q}. \tag{10}$$

Для математических ожиданий u и $\overline{u^2}$ имеем:

$$\bar{u}=\frac{1}{1-\int\limits_0^1 q\,d\varphi(q)}\,;\ \overline{u^2}=\frac{2\bar{u}}{1-\int\limits_0^1 q^2 d\varphi(q)}\,. \tag{11}$$

Таким образом, если мы образуем средние

$$\bar{q}=\int\limits_0^1 q\,d\varphi(q);\ \overline{q^2}=\int\limits_0^1 q^2\,d\varphi(q), \tag{12}$$

то

$$\bar{u}=\frac{1}{1-\bar{q}}\,;\ \overline{u^2}=\frac{2\bar{u}}{1-\overline{q^2}}>\frac{2\bar{u}}{1-\bar{q}^2}\,,$$

так как

$$\overline{q^2}>\bar{q}^2.$$

Поэтому относительное среднее квадратичное отклонение

$$\frac{\overline{u^2}-\bar{u}^2}{\bar{u}^2}=\frac{\int\limits_0^1 (1-q)^2\,d\varphi(q)}{\int\limits_0^1 (1-q^2)\,d\varphi(q)}$$

оказывается бо́льшим, чем то, которое было бы при облаках с одним и тем же q, равным $\bar{q}$.

Для ряда законов распределения $\varphi(q)$ прозрачностей поглощающих облаков уравнение (10) для плотности вероятности допускает решение в виде определенного интеграла. Так, если $\varphi(q)=q$, т. е. если все прозрачности равновероятны,

$$g(u)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iut}\frac{dt}{(1+it)^2}\,. \tag{13}$$

Если $\varphi(q)=q^2$, т. е. когда $\bar{q}={}^2/_3$ (что ближе к действительному положению вещей),

$$g(u)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iut}\frac{dt}{(1+it)^3}\,. \tag{14}$$

Полученные результаты связывают флуктуации яркости Млечного Пути с характеристиками совокупности поглощающих облаков.

Астрономическая обсерватория
Академии наук Армянской ССР, Ереван

Поступило
11.III 1944

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Амбарцумян, Бюллетень Абастуманской астрофизической обсерватории, **4**, 17 (1940).

Примечание. Легко убедиться, что при $\varphi(q) = q^k$ решение уравнения (10) имеет вид:

$$g(u) = u^k e^{-u}.$$